Estudio de cómo se enfrían los planetas rocosos

1. Introducción y Problema

El calor interno de un planeta rocoso proviene primero de la energía acumulada durante la fase de acreción, luego de la formación del núcleo de hierro y finalmente de la radiactividad del uranio, el torio y el potasio presentes en el manto.
Cuando toda la energía de la fase de formación se ha convertido en calor, el planeta comienza a enfriarse.
Pb: ¿Cómo puede disiparse el calor de la fase de formación de un planeta rocoso?

2. Edad de los estudiantes 15-17

3. Objetivos

Mostrar cómo el planeta puede enfriarse disipando su calor interno hacia la superficie y a través de ella.
Modelar experimentalmente y explotar matemáticamente los resultados.

4. Disciplinas principales

Matemáticas - Física - Ciencias de la Tierra.

5. Disciplinas Complementarias

Geografía - Informática

6. Tiempo requerido 2hrs

7. Palabras clave

Gradiente geotérmico - Flujo de calor - Disipación térmica.

8. Conocimientos previos

Uso de una hoja de cálculo de Excel – Python

9. Material

- Bola de petanca
- Recipiente con agua hirviendo
- Pelota de espuma vacía
- 4 sensores de temperatura
- Ordenador con software
- Excel

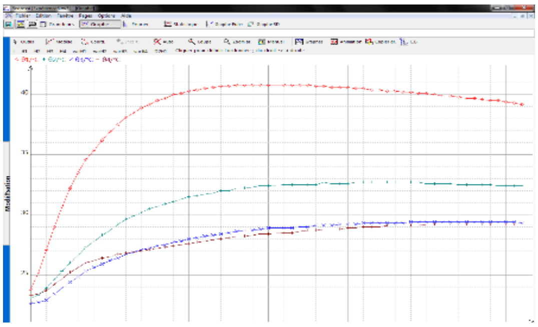
10. Procedimiento

- Modelado de la disipación interna de calor (flujo de calor):
Una de las misiones de Insight es determinar la cantidad de calor que continúa escapando de la superficie (flujo térmico).

- Coloque 4 sondas de temperatura en la pelota de espuma y asegúrese de colocarlas a diferentes profundidades, es decir: 1 cm, 2 cm, 3 cm y 4 cm.
-Sumerja la bola de petanca en agua hirviendo y colóquela dentro de la pelota de espuma.
-Selle el globo de espuma firmemente (para limitar las pérdidas de calor).
-Registre las temperaturas que se muestran en la pantalla cada minuto durante una hora.

Montaje:

Perfil de cambio de temperatura con la profundidad a partir de una hoja de cálculo:



- Evaluación matemática de los datos medidos del flujo de calor

Nos proponemos buscar si existe una relación una relación entre el tiempo t y la temperatura T:

Cuando la relación buscada es afín, es decir, $T = a + bt$ se llama **regresión lineal.**

Pero incluso cuando se detecta este tipo de relación, los datos medidos generalmente no se ajustan exactamente a esa relación.

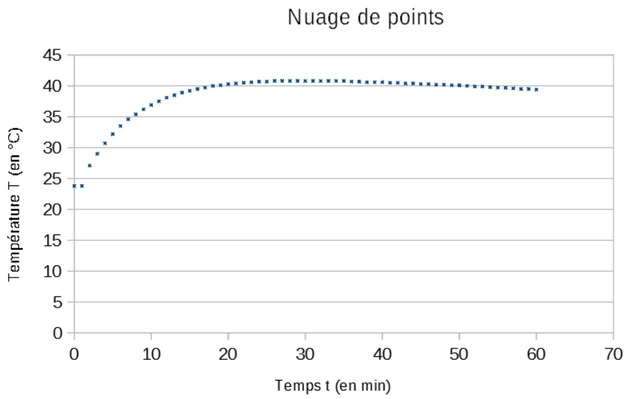
Primer estudio: Uso de una hoja de cálculo para determinar una relación entre tiempo *t* y temperatura *T*

Trabajaremos con los datos de la sonda para una profundidad dada.

En este ejemplo la sonda térmica está a una profundidad de 5 cm.

1) **Abra** el archivo **Insight-Mars-Hp3.ods** o **Insight-Mars-Hp3.xlsx** que contiene los datos medidos.

2) Copie los datos de tiempo **t** y temperatura T correspondientes en una hoja de cálculo, y represéntelos con una nube de puntos.



	A	B	C
1	temps	Prof 5 cm	
2	En min	en °C	
3			
4	0	23,8	
5	1	23,8	
6	2	27,1	
7	3	29	
8	4	30,7	
9	5	32,2	
10	6	33,5	
11	7	34,6	
12	8	35,4	
13	9	36,2	
14	10	36,9	
15	11	37,5	
16	12	38,1	
17	13	38,5	
18	14	38,9	
19	15	39,2	
20	16	39,5	
21	17	39,7	
22	18	40	
23	19	40,1	
24	20	40,3	
25	21	40,4	
26	22	40,5	

La segunda parte de la curva en que observamos un enfriamiento (como es el (como en la Tierra y Marte) parece aproximarse a una línea recta. Estudiaremos cómo determinar esta línea recta y si nuestros datos se adaptan a ella.

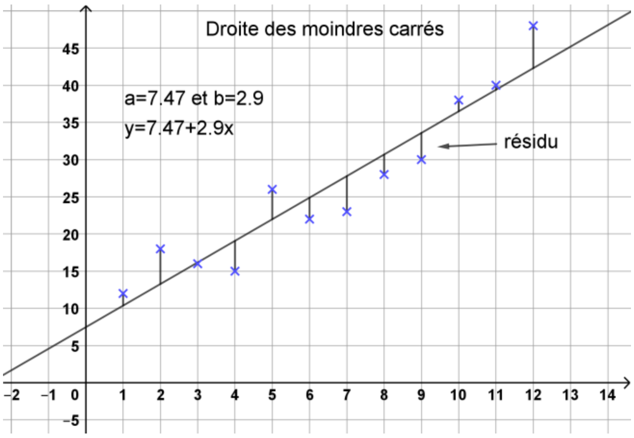
3) En este ejemplo, el estudio empieza en el momento t=35'. Represente los datos mediante la fórmula $\{t_i, T_i, i = 35,\ldots,60\}$ de la hoja de cálculo.

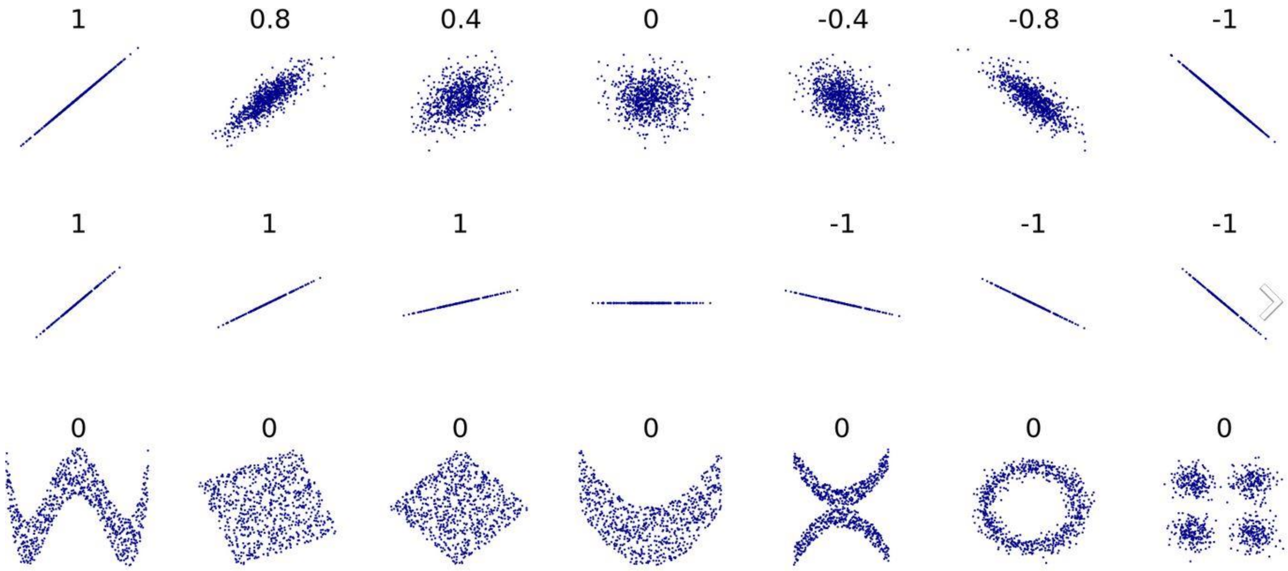
Buscar una relación refinada entre las variables ***t*** y ***T*** es como buscar la línea recta que se ajusta mejor a esta nube de puntos.

El método de mínimos cuadrados se usa para ajustar la nube de puntos a una recta de ecuación a y=a+bt con a y b que hagan que la suma de los cuadrados sea mínima:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (a + bt_i)\right)^2$$

Esta recta, que suponemos única, se llama **recta de los cuadrados mínimos.**
La idea de este método es determinar una línea que minimice una medición total de las discrepancias entre los puntos de la nube y los puntos con la misma abscisa de la recta. Por lo tanto, cuanto más pequeña sea esta medida, más cercana estará la recta a todos los puntos de la nube, y mejor será el ajuste.





Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Pearson_product-moment_correlation_coefficient

El estudio de la minimización de esta discrepancia no es objeto de esta actividad.

Se denomina coeficiente de correlación lineal al número real r definido como: $r = \frac{\sigma_{t,y}}{\sigma_t \sigma_y}$

con $\sigma_{t,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$, $\sigma_t = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2\right)}$

$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right)}$

$\bar{t}$ e $\bar{y}$ representan las medias de las t_i y las y_i , $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$ y $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

Este coeficiente nos permitirá saber si el ajuste es relevante o no y dará información sobre la nube de puntos en función del valor de *r:*

Se usarán los siguientes criterios numéricos al utilizar r^2:

- si $0{,}75 \leqslant r^2 \leqslant 1$ entonces existe una buena correlación lineal entre Y y t

- si $0{,}25 \leqslant r^2 \leqslant 0{,}75$ entonces existe una correlación lineal débil entre Y y t

- si $0 \leqslant r^2 \leqslant 0{,}25$ entonces existe una mala correlación lineal entre Y y t

4) Calcule el coeficiente r con los datos de temperatura a una profundidad de 5cm.

(Atención: las coordenadas Y corresponden a los valores de las temperaturas T)

Vamos a determinar la existencia de tal recta durante el enfriamiento, que en nuestro caso tardó entre 35 y 60 minutos.

Complete su hoja de cálculo para obtener r y r².

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1			$t_i\text{-}\bar{t}$	$T_i\text{-}\bar{T}$	$(t_i\text{-}\bar{t})^2$	$(T_i\text{-}\bar{T})^2$	$(t_i\text{-}\bar{t})(T_i\text{-}\bar{T})$	σ(t,T)	σ(t)	σ(T)	Coefficient de corrélation r	Valeur de r²
2	Calcul de la moyenne $\bar{t}$ des temps t											
3												
4												
5	Calcul de la moyenne $\bar{T}$ des températures T											

Si el ajuste es relevante, continue:

5) Si el ajuste es relevante, la línea de regresión lineal $y = a + bt$ se puede obtener calculando los números a y b con las fórmulas:

$$b = \frac{\sigma_{t,y}}{{\sigma_t}^2} \qquad\qquad a = \overline{y} - b\bar{t}ab$$

Calcule los números a y b para obtener la ecuación de la línea de regresión lineal que se ajusta a esta nube de puntos.

La existencia de esta relación entre el tiempo t y la temperatura T observada en cada momento refleja la existencia de una conductividad térmica específica de un medio, en este caso, la espuma del globo.

<u>Ampliación:</u>

Ponga en común los resultados obtenidos por cada grupo responsable del estudio en una profundidad. De esta manera, pondremos en evidencia una relación entre los tiempos y el intercambio de calor entre dos sondas.

<u>Segundo estudio</u>: Utilización de Pyton para determinar una relación entre los tiempos *t* y las temperaturas registradas *T*.

Trabajaremos con los datos de la sonda térmica situada a una profundidad de5cm.

Nos proponemos buscar la relación que pueda existir entre los tiempos *t* las temperaturas registradas *T* con el software Python y nos limitaremos al estudio de un ajuste lineal.
1) **Inicie** el software **Pyzo** y **copie** los dos archivos **Tiempo.csv** y **Temperature.csv** en el directorio donde se
encuentra guardado el programa Python.

2) El siguiente código permite transformar archivos csv en una lista en formato Python:

```
import csv

    # Les fichiers csv doivent être stockés dans le même repertoire que les fichiers python sauvegardés

    # Code pour convertir le fichier Temps.csv en fichier utilisable par Python à fournir aux élèves

with open("Temps.csv") as f:
    Temps = list(csv.reader(f))
var_list = []
list_tot = []
for i in range(0,len(Temps)):
    var_list = Temps[i]
    var_list = list(map(int,var_list))
    list_tot = list_tot + var_list
Temps = list_tot

    # Code pour convertir le fichier Temperature.csv en fichier utilisable par Python à fournir aux élèves

with open("Temperature.csv") as f:
    Temperature = list(csv.reader(f))
var_list = []
list_tot = []
for i in range(0,len(Temperature)):
    var_list = Temperature[i]
    var_list = list(map(float, var_list))
    list_tot = list_tot + var_list
Temperature = list_tot

from math import sqrt
```

El estudio de las funciones Map y Open del programa Python no son objeto de esta actividad.

Los datos de tiempo se almacenan en la lista "Temps" (**Tiempo)**.

Los datos de temperatura se almacenan en la lista **Temperatura**.

Queremos editar un programa que dé:

- el coeficiente de correlación r en el intervalo de tiempo desde n min a 60 min (n es el momento a partir del cual se alcanzará un régimen estacionario);
- los coeficientes a y b de la línea de regresión buscada si el ajuste es pertinente

Para ello, tendremos que determinar todos los elementos necesarios para estos cálculos.

(Las fórmulas de cálculo se encuentran en la última página)

Después de copiar el código anterior en el programa, continúe así:

```
def equation_moindre_carre(n):
```

3) a) Complete este programa con el fin de obtener el promedio

- del tiempo medio $\bar{t}$ denominado “moyenne_t”

- de la temperatura media $\overline{T}$ denominada “moyenne_T”

b) Complete este programa para obtener una lista que dé los valores $t_i - \bar{t}$ denominados ecart_t

c) Complete este programa para obtener una lista que dé los valores $T_i - \overline{T}$ denominados ecart_T

d) Complete este programa para obtener una lista que dé los valores $(t_i - \bar{t})^2$ señalados carre-ecart_t

e) Complete este programa para obtener una lista que dé los valores $\left(T_i - \overline{T}\right)^2$ denominados carre-ecart_T

f) Complete este programa para calcular $\sigma_{t,T}$ denominado Sigmat_t_T

g) Complete este programa con el fin de calcular σ_t denominado Sigma_t

h) Complete este programa con el fin de calcular el valor de r cuando n=41.

¿Es relevante el ajuste lineal?

4) Determinar la ecuación de la recta de regresión de los cuadrados mínimos.

a) Complete este programa para calcular el valor de a.

b) Complete este programa para calcular el valor de b.

c) Complete su programa para que muestre la ecuación desde esta recta.

<u>Fórmulas:</u>

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \sigma_t = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2\right)} \quad \sigma_y = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right)}$$

$$\sigma_{t,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) \qquad r = \frac{\sigma_{t,y}}{\sigma_t \sigma_y}$$

La ecuación de la recta de regresión es: $y = a + bt$ con: $b = \frac{\sigma_{t,y}}{{\sigma_t}^2}$ y $a = \bar{y} - b\bar{t}$

Usaremos los siguientes criterios numéricos usando r^2:

- si $0{,}75 \leqslant r^2 \leqslant 1$ entonces existe una buena correlación lineal entre Y y t
- si $0{,}25 \leqslant r^2 \leqslant 0{,}75$ entonces existe una correlación lineal débil entre Y
- si $0 \leqslant r^2 \leqslant 0{,}25$ entonces existe una mala correlación lineal entre Y y t

11. Discusión de los resultados y conclusión:

Acabamos de demostrar que los planetas rocosos disipan su calor interno hacia arriba y a través de la superficie, lo que conduce a su enfriamiento.

Los científicos han propuesto modelos que muestran cómo el calor interno de la Tierra puede disiparse por convección, conducción térmica, vulcanismo, tectónica de placas, etc. En Marte, la disipación de calor se debe en gran parte a un vulcanismo significativo y probablemente progresivamente por "convección".

Exploraremos estos procesos en las siguientes actividades (2, 3 y 4).